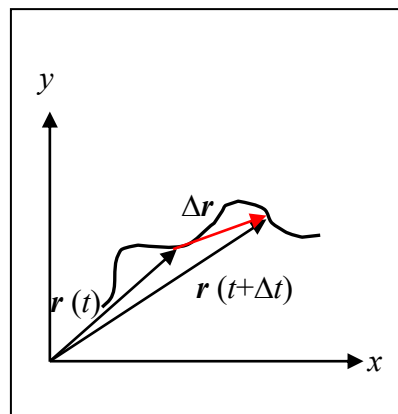


Cinematica del punto: spostamento e velocità nel moto curvilineo

Lo studio dei moti nello spazio in due o tre dimensioni richiede l'estensione dei concetti fino a ora affrontati tramite l'utilizzo del formalismo vettoriale. Si tratta di considerare ora traiettorie curvilinee (in generale) e per esse quantificare rigorosamente le grandezze fisiche che consentono di determinare posizione, velocità e accelerazione istantanee per punti che si muovono lungo tali traiettorie.

A tale scopo si considera un moto curvilineo piano e s'individua la posizione istantanea del punto tramite il vettore di posizione $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t)$, ove si sono introdotte le componenti orarie per lo spostamento secondo gli assi cartesiani ed orientati lungo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

Si può ora considerare uno spostamento vettoriale del punto in seguito ad un suo movimento lungo la traiettoria a partire da un istante di riferimento t fino ad un istante successivo spaziatosi dal primo dall'intervallo temporale Δt , ossia $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$. Secondo questa definizione, si osserva che il vettore spostamento $\Delta \mathbf{r}$ è l'estensione a due (o più) dimensioni della variazione di coordinata



unidimensionale Δx adottata in precedenza per definire la velocità media del punto nel suo moto. In perfetta analogia con questo caso, definiamo dunque la velocità vettoriale media secondo la

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} ,$$

che evidenzia in modo del tutto naturale i seguenti fatti:

- la velocità media è un vettore parallelo ed equiverso al vettore spostamento;
- tale grandezza vettoriale è dimensionalmente una velocità;
- essa può essere ottenuta a partire dalle componenti $\Delta x/\Delta t$, $\Delta y/\Delta t$, $\Delta z/\Delta t$ che corrispondono alle velocità medie secondo i due (o tre) assi coordinati.

In base a queste considerazioni, è ancora naturale considerare la definizione di velocità vettoriale istantanea lungo la traiettoria (curvilinea) a partire dai limiti per $\Delta t \rightarrow 0$ delle componenti della velocità media, come pure a partire dal limite "vettoriale" della posizione del punto sulla traiettoria, che automaticamente tende alla direzione tangente alla traiettoria stessa nella posizione considerata. Si ha dunque, per la velocità istantanea del punto, che

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt} .$$

In questa espressione si può vedere come la velocità istantanea vettoriale sia, di fatto, una naturale estensione nello spazio a due o tre dimensioni della definizione unidimensionale trattata in precedenza. Vale inoltre la notazione $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_T$, ove il vettore velocità risulta scomposto nel suo modulo, $v = (v_x + v_y + v_z)^{1/2}$, e nel versore $\mathbf{u}_T$, che per quanto detto sopra risulta costantemente (ossia istante per istante o punto per punto) tangente alla traiettoria ed orientato nel verso di percorrenza della traiettoria stessa.