Corso di Fisica 1 – Dipartimento di Ingegneria Industriale - 2019

Moti planetari, leggi di Kepler e la gravitazione universale

Uno stimolo di vastissima portata conoscitiva nel campo della fisica moderna è da collocarsi nello studio e nell'interpretazione dei moti planetari nel nostro sistema solare. A partire dalla formulazione dell'ipotesi eliocentrica di Copernicus, dalle osservazioni sperimentali di Brahe e dalle interpretazioni empiriche di Kepler, si è giunti, tramite l'opera unificatrice di Newton, alla comprensione di un modello di interazione gravitazionale su scala universale.
Lo schema semplificato prevede di considerare i pianeti (puntiformi) orbitanti attorno al sole (infinitamente massivo) secondo orbite circolari. Le misure conducono ai valori dei raggi R (medi) delle orbite ed ai periodi di percorrenza T per tutti i pianeti. Si realizzò che la grandezza aR^2, in cui $a=v^2/R=\omega^2R=4\pi^2R/T^2$ è l'accelerazione centripeta del pianeta generico, era costante con grande precisione, ossia non dipendeva dal pianeta considerato. Si scrive pertanto $aR^2=k_S$, con k_S costante "solare" e pari circa a 1.3×10^{20} m^3/sec^2. Ciò equivale ad affermare che il quadrato del periodo di orbita è in rapporto fisso (entro ottima approssimazione) con il cubo del raggio (medio, o meglio, con il semiasse maggiore dell'ellisse che in realtà percorre il pianeta), tale rapporto essendo scritto come

$$R^3/T^2= k_S/4\pi^2=\text{cost.}$$

Questa relazione costituisce l'essenza di una delle tre leggi di Kepler, le altre due riferendosi rispettivamente alla forma dell'orbita (ellittica piana con il sole in un fuoco) e all'invarianza della "velocità areolare", ossia il fatto che un pianeta in orbita a raggio variabile si muove più rapidamente quando si trova vicino al sole (perielio) di quando si trova lontano da esso (afelio). Quest'ultima legge è spiegabile in termini della legge conservazione del momento angolare, applicabile com'è noto in presenza di forze di tipo "centrale".
Il punto importante è che le tre leggi (empiriche) di Kepler suggeriscono a Newton una possibile spiegazione della meccanica dei corpi celesti basata su una legge fisica di universale applicabilità. Newton ipotizza che la legge della dinamica che collega massa, forza e accelerazione sia applicabile anche al pianeta attratto dal sole. Pertanto scrive per tale pianeta la forza

$$F_{\text{sole-pianeta}}=m_Pa=m_Pk_S/R^2.$$

In virtù del terzo principio della dinamica, si deve anche ipotizzare una condizione di reciprocità nell'interazione fra sole e pianeta, per la quale la forza dovrà risultare proporzionale di fatto anche alla massa del sole. Dunque si può scrivere

$$F_{\text{sole-pianeta}}=G\, m_S\, m_P/R^2$$

ove si introduce la costante di gravitazione universale $G=k_S/m_S$. Tale grandezza non può essere determinata a partire dalla relazione che la definisce nell'ambito dell'analisi dei moti planetari, perché richiederebbe la conoscenza della massa solare. In alternativa, si può considerare l'applicazione dell'ultima relazione scritta (se è di validità universale) a un corpo di massa m in prossimità della superficie terrestre, ove dunque si ponga $m_S=m_T$ (massa terrestre) nonché $R=R_T$ (raggio terrestre). Dunque si ottiene che $F_{\text{massa-terra}}=G\, m\, m_T/R_T^2=mg$, dove g è l'accelerazione di gravità al suolo. In definitiva $g= G\, m_T/R_T^2$, che permette il calcolo indiretto di G tramite la conoscenza di g, del raggio e della massa terrestre. Quest'ultima non è ottenibile direttamente. Il problema fu risolto grazie all'esperimento di Cavendish, che riuscì a ottenere una misura *diretta* della costante G confrontando l'attrazione gravitazionale fra masse disposte in particolari e sensibili bilance di torsione. In tale modo si ricava che $G=6.67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2, e i valori delle masse solari e planetarie.

Per quanto riguarda la sostanza della seconda legge di Kepler relativa all'invarianza della velocità areolare, è necessario aprire il capitolo dedicato alla centralità delle forze (ossia alla loro natura vettoriale) e al ruolo giocato in tale schema dal momento angolare. Per ora si osservi che, dalle osservazioni sperimentali sui moti planetari e dalle ipotesi newtoniane si giunge a una legge che spiega l'interazione fra masse (siano esse puntiformi che estese) che prevede un'attrazione in modulo proporzionale al *prodotto delle masse* nonché all'inverso del quadrato della distanza. La validità di questa legge spazia dalla scala subatomica a quella cosmica.