Corso di Fisica 1 - Ing. Industriale

A. A. 2018/2019

Esercitazione di Cinematica 1/2

07/03/19

Problemi

Problema 1

Davide è un fidanzato che ha un grande difetto: arriva sempre in ritardo. Melania, la sua morosa, abita esattamente a $10km$ da casa sua. La sua moto può garantire istantaneamente una accelerazione costante di $5m/s^2$ e pinze dei freni, se premute, forniscono una accelerazione di $129600km/h^2$ nella direzione opposta al moto. Supponendo che il tragitto sia interamente dritto e che la moto possa raggiungere una velocità massima di $180km/h$, a che ora deve partire Davide se ha un appuntamnto con Melania alle 19:00?

Problema 2

Come suo solito Davide è arrivato in ritardo. Melania che è permalosa, si rifiuta di scendere e anzi, sapendo già come sarebbe andata, ha preparato alcuni gavettoni da tirare al povero moroso. Supponendo che Davide sia in ginocchio sotto a finestra della amata e la sua testa si trovi a $15.3dm$ da terra, calcolare la velocità con cui il primo gavettone colpisce sapendo che Melania si trova $10m$ sopra di lui. Calcolare anche il tempo di caduta.

Problema 3

Supponiamo che Davide inizi a correre con una velocità di $8m/s$. Calcolare l'angolo θe la velocità di lancio affinchè Melania lo colpisca con un gavettone dopo $5s$. Supponiamo che Davide sia alto $1.8m$, che corra in linea retta e non cerchi mai di schivare il gavettone.

Problema 4

Melania si è chiusa in casa, ed ha sbarrato la finestra di camera sua. Davide, per cercar di attirare la sua attenzione, inizia a tirare dei sassolini contro la sua finestra. Supponendo che il lancio sia verticale, con velocità $50m/s$ e che i sassi siano tirati ad intervalli di $2s$ a che altezza si incontreranno il primo e il secondo sasso? e il primo e il decimo? Trascurare completamente l'urto con la finestra.

Problema 5

Stimare la profondità di un pozzo, sapendo che lasciando cadere un sasso, l'eco della caduta raggiunge l'osservatore dopo $2s$ e che la velocità del suono sia $340m/s$.

Problema 6

Il lancio del disco è uno sport olimpico in cui si prova a lanciare più lontanto possibile un disco di legno. Il record attuale di lancio in tale disciplina è di $74m$. Assumendo che il disco parta da una altezza iniziale di $1.55m$ e che le braccia del discobolo siano di $80cm$ calcolare la frequenza di rotazione. Si assuma un moto circolare uniforme prima del lancio.

Problema 7

Data la frequenza di rotazione della terra sul suo asse, stimare la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta in funzione della latitudine.

Problema 8

Supponiamo che un volano passi da una velocità angolare di 20 rad/s^{-1} a 30 rad/s^{-1} in 5 minuti. Calcolare l'angolo descritto e l'accelerazione angolare. Calcolare la sua accelerazione centripeta iniziale e finale.

Problema 9

Ricavare la traiettoria di una particella che si muove con legge oraria:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \hat{\mathbf{i}} A \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{j}} B \sin(\omega t)$$

Che tipo di moto è? Fare il disegno delle componenti $\vec{\mathbf{r}}_x$ e $\vec{\mathbf{r}}_y$. Ricavare accelerazione e velocità in funzione di t.

Problema 10

Le lancette di un di un orologio si trovano a $\pi/2$ una rispetto all'altra al tempo t_0. Dopo quanto tempo si troveranno tutte nella stessa posizione? Considerare solo le lancette a 2 a 2.In seguito provare a ragionare sul problema includendo anche la lancetta delle ore. Provare a risolvere il problema graficamente con un programma di calcolo grafico

---

Soluzioni

Soluzione P1

Il problema è semplicemente risolvibile calcolando lo spazio percorso in ogni singolo tratto (0-t_1,$t_1 - t_2$,$t_2 - t_3$).

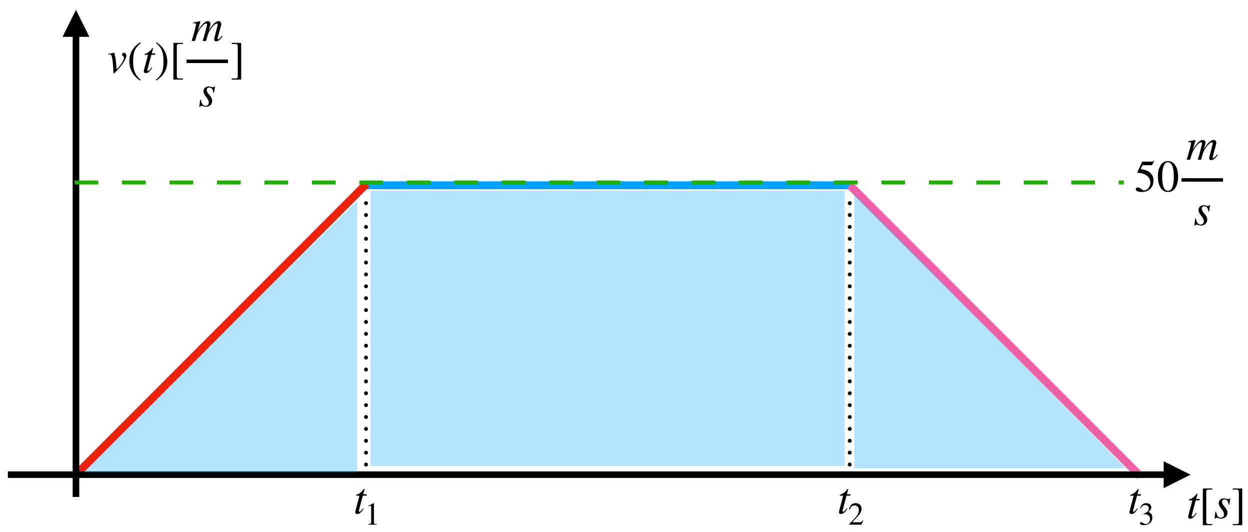

Figura 1: Grafico velocità-tempo.

Assumiamo come direzione positiva la direzione descritta dal versore avente casa di Davide e punta casa di Melania:

Casa Davide $\rightarrow$ Casa Melania

e che casa di Davide sia posizionata nell'origine. Questa scelta ci permette di rimuovere il segno di vettore da ogni quantità in gioco.

Tratto 0-t_1

Il moto è uniformemente accellerato tale per cui la massima velocità possibile è ottenuta:

$$v(t_1) = a_{moto} * (t_1 - 0s)$$

Dato $v(t_1) = 50.0\frac{m}{s}$ abbiamo che

$$t_1 = \frac{v(t_1)}{a_{moto}} = 10s$$

e lo spazio percorso risulta:

$$x(t_1) = \frac{1}{2}a_{moto} * t_1^2 = 250m$$

Tratto $t_3 - t_2$

Come in precedenza il moto risulta ad accelerazione costante. Facilmente troviamo il tempo di frenata:

$$0 = v(t_2) - a_{freni} * (t_3 - t_2)$$

da cui otteniamo che:

$$(t_3 - t_2) = \frac{v(t_2)}{a_{freni}} = 5s$$

il cui spazio percorso è:

$$x(t_3) - x(t_2) = v(t_2) * (t_3 - t_2) - \frac{1}{2}a_{freni} * (t_3 - t_2)^2 = 125m$$

Ora dato che casa di Melania è situata in $x(t_3) = 10000m$ abbiamo che $x(t_2) = x(t_3) - 125m = 9875m$ Di conseguenza il restante tratto che ci rimane da calcolare sarà:

$$x(t_2) - x(t_1) = 9875m - 250m = 9625m$$

Tratto $t_2 - t_1$

Il moto è uniforme a velocità costante tale per cui $v(t_1) = v(t_2)$. Abbiamo ottenuto prima che $x(t_2) - x(t_1) = 9625m$, pertanto il tempo necessario per riuscire compiere questo tratto sarà:

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{v(t_1)} \simeq 193s$$

Ricordandoci dei tempi calcolati negli altri pezzi avremo che a Davide servono esattamente $t_{tot} = (193 + 10 + 5)s = 208s$ che equivalgono a 3 minuti e 28 secondi, pertanto dovrà partire almeno almeno alle 18:56:32.

Soluzione P2

Un moto di caduta di gravi è di fatto un moto uniformemente accellerato. Ricordiamo che l'accelerazione di gravità vale $g = 9.81\frac{m}{s^2}$. Iniziamo fissando il moto dall'alto verso il basso, ponendo il lato positivo verso la direzione della testa di Davide. Il nostro versore avrà quindi coda sulla finestra di Melania e punterà verso la testa di Davide. Fissiamo l'origine nel punto in cui viene sganciato il gavettone. Sappiamo che La finestra di camera di Melania si trova a $h = 10m$, e che la testa di Davide si trova a $h_D = 1.53m$ dal suolo. Il gavettone dovrà quindi percorrere una altezza $h_g = h - h_D = 8.47m$. Fissiamo quindi $h_0 = 0$. La velocità sarà quindi data da:

$$v_{imp} = gt_c$$

dove t_c è il tempo di caduta. Quest'ultimo si può ricavare dalla legge oraria:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt_c^2$$

da cui otteniamo:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h_g}{g}}$$

. Inseriamo nell'equarione precedente per ricavare che v_{imp} è:

$$v_{imp} = \sqrt{2h_g g} \simeq 12.89\frac{m}{s}$$

Soluzione P3

Il punto da colpire avrà come posizione:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \hat{\mathbf{i}} v_{fuga} t + \hat{\mathbf{j}} h_D$$

dove abbiamo scelto il versore $\hat{\mathbf{i}}$ avente verso concorde con il moto di Davide e il versore $\hat{\mathbf{j}}$ avente verso opposto rispetto all'accelerazione di gravità (vedi figura 2.)

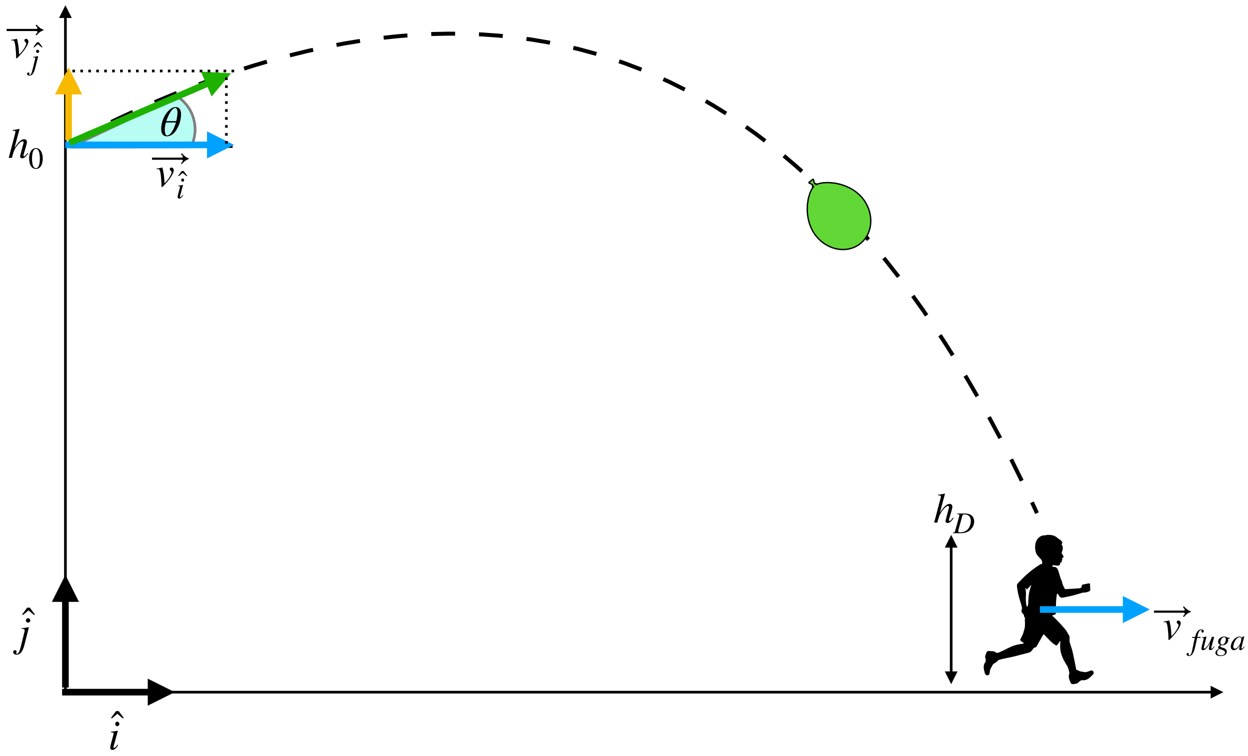

Figura 2: Problema 3.

Il moto del gavettone può essere diviso nelle sue componenti $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$: in $\hat{\mathbf{i}}$ il moto risulterà unforme, mentre in $\hat{\mathbf{j}}$ il moto è uniformemente accelerato. Ora, affinchè vi sia impatto, dobbiamo avere che queste due componenti siano uguali alle componenti della legge oraria $(x(t), y(t))$ di Davide al tempo t_{imp}. Questa condizione si traduce nel sistema di equazioni:

$$\begin{cases} v_l \cos(\theta) t_{imp} = v_{fuga} t_{imp} \\ h_0 + v_l \sin(\theta) t_{imp} - \frac{1}{2} g t_{imp}^2 = h_D \end{cases}$$

dove g è l'accellerazione di gravità, $v_l \cos(\theta)$ è la proiezione del vettore velocità $\vec{\mathbf{v}}$ sulla componente $\hat{\mathbf{i}}$ e $v_l \sin(\theta)$ è la proiezione del vettore velocità $\vec{\mathbf{v}}$ sulla componente $\hat{\mathbf{j}}$, dove abbiamo già eliminato il simbolo di vettore dato che analizziamo moti unidimensionali. Dall'equazione otteniamo che:

$$v_l \cos(\theta) = v_{fuga} \rightarrow \cos(\theta) = \frac{v_{fuga}}{v_l}$$

Date le proprietà del coseno abbiamo già che se $v_{fuga} > v_l$, il sistema non ha soluzioni, ed effettivamente questo equivale alla sistuazione fisica in cui Davide è più veloce del gavettone e di conseguenza non viene colpito. poniamoci quindi nel caso $v_{fuga} \leq v_l$ Sostituiamo nell'equazione , utilizzando le usuali proprietà trigonometriche:

$$h_0 + v_l \sqrt{1 - \left(\frac{v_{fuga}}{v_l}\right)^2} t_{imp} - \frac{1}{2} g t_{imp}^2 = h_D$$

$$v_l^2 \left(1 - \left(\frac{v_{fuga}}{v_l}\right)^2\right) = \left(\left(\frac{h_D - h_0}{t_{imp}}\right) + \left(\frac{1}{2} g t_{imp}\right)\right)^2$$

Notiamo che il precedente passaggio è possibile solo se $\left(\left(\frac{h_D - h_0}{t_{imp}}\right) + \left(\frac{1}{2} g t_{imp}\right)\right) > 0$. La velocità di lancio sarà data da:

$$v_l^2 = \left(\left(\frac{h_D - h_0}{t_{imp}}\right) + \left(\frac{1}{2} g t_{imp}\right)\right)^2 + v_{fuga}^2$$

da cui otteniamo $v_l \simeq 24.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ e di conseguenza $\theta = \arccos(0.3)$.

Soluzione P4 (Dalba-Fornasini)

Poniamo il versore del moto avente coda sul terreno e punta verso la finestra. Il moto di un singolo sassolino sarà descritto dalla legge oraria:

$$y(t) - y_0 = v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Scegliamo che la y al momento del lancio sia 0. L'unica differenza tra il primo e il secondo sassolino è il tempo di partenza in cui per il primo sarà 0 e per il secondo sarà $t_0 = 2s$. Poniamo $y(t_{in})_1 = y(t_{in})_2$ dove i sottopedici fanno riferimento rispettivamente al primo e al secondo sasso.

$$v_0(t_{in}) - \frac{1}{2}g(t_{in})^2 = v_0(t_{in} - t_0) - \frac{1}{2}g(t_{in} - t_0)^2$$

che risolvendo da:

$$t_{in} = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{2}t_0$$

Questa è una relazione generale che ci da il tempo di incontro tra un generico sasso lanciato in verticale e uno lanciato dopo un tempo t_0. Nel caso del primo e del secondo sasso abbiamo $t_0 = 2s$ da cui otteniamo $y(t_{in}) = v_0 t_{in} - \frac{1}{2}gt_{in}^2 \simeq 120m$. Nel caso invece del primo e del decimo non abbiamo alcuna soluzione fisica: infatti abbiamo che $t_{in} = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{2}t_0$, ma allo stesso tempo abbiamo bisogno che $t_{in} - t_0 > 0$. Di fatto possiamo avere soluzioni fisiche quindi solo se: $\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}t_0 \geq 0$, ma nel caso considerato $t_{in} - t_0 \simeq -5$, che è come se l'incontro avvenisse prima del lancio del decimo sasso.

Soluzione P5

La profondità del pozzo è data da h. Poniamo il versore del moto avente la punta che guarda il fondo del pozzo. Il moto di caduta sarà descritto dalla legge oraria:

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Il fondo è toccato a $y(t_c) = 0$ da cui ricaviamo $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Il suono si muove di moto unifrome per cui la legge oraria del fronte d'onda dell'onda acustica sarà:

$$y_{suono}(t) = v_s t$$

Il suono arriva all'osservatore dopo aver percorso $h = v_s t_{ris}$, da cui otteniamo:

$$t_{ris} = \frac{h}{v_s}$$

Ora basta ricordare che l'osservatore sente l'eco dopo $2s$:

$$2s = t_c + t_{ris} = \frac{h}{v_s} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

L'equazione da risolvere generale sarà data da:

$$T_{tot} = \frac{h}{v_s} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ed è solo questione di fare dei passaggi algebrici per ottenere il risultato.

Soluzione P6

Il problema è facilmente risolvibile componendo i 2 modi: quello parabolico del lancio e quello in cui il disco gira. Il lancio a gittata maggiore è quello a $\theta = \frac{\pi}{4}$ pertanto le componenti della velocita avranno modulo uguale a $\frac{v_l}{\sqrt{2}}$. I versori sono disposti come quelli del problema 3. Il tempo di volo sarà dato da:

$$t_{volo} = \frac{x_R}{v_l \cos(\theta)}$$

A questo punto la nostra legge oraria per il moto in $\hat{\mathbf{j}}$ sarà data da:

$$y(t) = h_0 + v_l \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Inseriamo i dati e otteniamo:

$$0 = h_0 + v_l \sin(\theta)\frac{x_R}{v_l \cos(\theta)} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_R}{v_l \cos(\theta)}\right)^2$$

Svolgendo alcuni passaggi algebrici ricaviamo una espressione per v_l:

$$v_l = \sqrt{g\frac{x_R^2}{h_0 + x_R}}$$

a questo punto basta ricordare che nel moto circolare uniforme la velocità tangenziale è data da $v_T = \omega R$, dove R è la lunghezza del braccio dell'atleta. Per cui otteniamo:

$$\omega = \frac{\sqrt{g\frac{x_R^2}{h_0+x_R}}}{R} \simeq 33.3s^{-1}$$

Soluzione P7

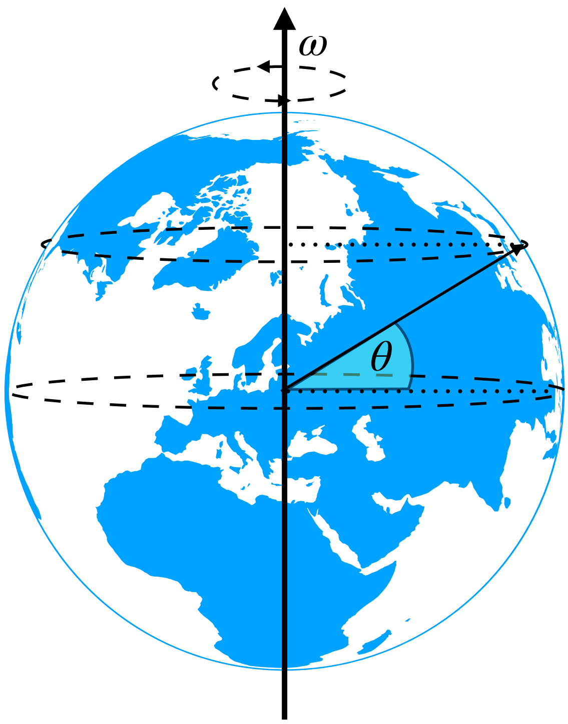

Figura 3: Problema 7.

Da considerazioni geometriche il raggio della Terra alla latitudine definita dall'angolo θ è $R(\theta) = Rcos(\theta)$. A questo punto la velocità tangenziale è data da:

$$v_T = \omega R(\theta) = \omega R\cos(\theta)$$

mentre l'accellerazione centripeta da:

$$a_c = \frac{v_T^2}{R(\theta)} = \omega^2 R\cos(\theta)$$