Corso di Fisica 1 – Dipartimento di Ingegneria Industriale - 2019

Corpi rigidi e rotazioni attorno a un asse fisso: legge della dinamica rotazionale.

Consideriamo ora una serie di conseguenze della legge della dinamica per rotazioni di un sistema di particelle, $\boldsymbol{\tau}_Q^{(E)}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}_Q/\mathrm{d}t$, proiettata lungo l'asse (fisso) di rotazione z, e la formulazione del momento angolare per un corpo rigido basata sulla definizione di momento di inerzia, $L_{Qz}=I_z\omega$. Il risultato immediato è che (per corpi rigidi in rotazione attorno ad un asse fisso) vale la

$$\tau_{Qz}^{(E)}=\mathrm{d}(I_z\omega)/\mathrm{d}t.$$

Se poi il momento di inerzia rispetto l'asse z è costante, si può anche scrivere

$$\tau_{Qz}^{(E)}=I_z\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=I_z\alpha,$$

espressa quest'ultima relazione in funzione dell'accelerazione angolare del sistema, α. Osserviamo dunque che esiste un legame preciso (limitatamente ai casi di corpi rigidi in rotazione attorno a un asse fisso) fra la *causa* della variazione di moto rotazionale (il momento relativo all'asse) e l'*effetto* (l'accelerazione angolare) tramite il momento di inerzia a tale asse associato: questo risultato è in diretta corrispondenza con la legge della dinamica per le traslazioni di un punto materiale (o del centro di massa), ove però alla massa è sostituita la "massa distribuita attorno all'asse", ossia il momento di inerzia, nonché la forza e l'accelerazione sono rimpiazzate dalle corrispettive grandezze angolari (momento di forza ed accelerazione angolare).

E' importante osservare inoltre che, in assenza di momenti di forza agenti lungo l'asse di rotazione (corpo "libero" – rotazionalmente parlando), vale la conservazione del momento angolare, ossia il prodotto $I_z\omega$ risulta una quantità costante. Vi sono svariate ed interessanti conseguenze di questo fatto. In particolare, sono da citare i sistemi ad elevata "stabilità precessionale", ossia quegli oggetti caratterizzati dall'avere un elevato momento angolare a causa di corrispondentemente elevati valori di momento d'inerzia e/o di velocità angolare. In tali casi, per indurre variazioni di momento angolare (dunque di velocità angolare e di *direzione* del momento angolare stesso, per un corpo rigido) è necessario applicare un momento di forza sufficientemente intenso per tempi prolungati. Se questo non avviene (o avviene debolmente, viste le premesse), l'oggetto acquista una stabilità particolare nella progressione del moto (gioco del fresbee, piattaforme e bussole giroscopiche, trottole, satelliti artificiali, proiettili, etc.).

Se il corpo non è rigido (può dunque modificare il suo momento d'inerzia attorno a un dato asse), all'assenza di momenti di forza esterni si associa invece una variazione di velocità angolare necessaria a mantenere invariato il momento angolare (è il caso della ballerina o del pattinatore artistico che, estendendo o raccogliendo le braccia fa aumentare o diminuire il momento d'inerzia e dunque diminuire o aumentare la velocità di rotazione attorno all'asse).

D'ora in avanti, ci interessiamo invece agli effetti specifici di un momento di forza non nullo relativo ad un asse fisso, per il quale osserviamo un'accelerazione angolare non nulla attorno a tale asse come assegnato dalla legge della dinamica sopra discussa.

E' anche possibile tracciare un semplice bilancio energetico in presenza di moti puramente rotazionali causati da momenti di forza non bilanciati: la legge che definisce il lavoro elementare, $\mathrm{d}W=F_t\mathrm{d}s$, dove F_t è la componente di forza tangenziale allo spostamento, si può scrivere ora come $\mathrm{d}W=F_tR\mathrm{d}\theta=\tau_z\mathrm{d}\theta$. Dunque il lavoro totale è ottenuto integrando, al posto di $F_t\mathrm{d}s$, la "quantità angolare" $\tau_z\mathrm{d}\theta$. Anche l'energia cinetica (ed il teorema delle forze vive) ha una utile scrittura in corrispondenza di questo tipo di effetti: alla $mv^2/2=p^2/2m$ dovremo sostituire la relazione $I\omega^2/2=L^2/2I$.