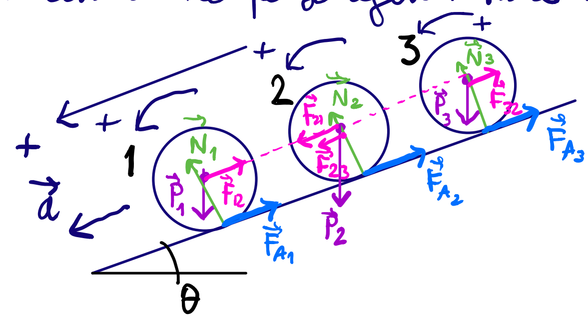
1

Si considerano le forze agenti sulle tre masse :



equazioni del moto (le accelerazioni sono tutte eguali)

$$m_1\vec a = \vec P_1+\vec N_1+\vec F_{A1}+\vec F_{12}$$
$$m_2\vec a = \vec P_2+\vec N_2+\vec F_{A_2}+\vec F_{21}+\vec F_{23}$$
$$m_3\vec a = \vec P_3+\vec N_3+\vec F_{A_3}+\vec F_{32}$$

proiezioni lungo l'asse orientato parallelamente al piano inclinato

$$m_1 a = m_1 g\sin\theta - F_{A_1} - F_{12}$$
$$m_2 a = m_2 g\sin\theta - F_{A_2} + F_{21} + F_{23}$$
$$m_3 a = m_3 g\sin\theta - F_{A_3} - F_{32}$$

NB_1 : le forze $\vec F_{ij}$ sono esercitate dalle aste sui corpi .

NB_2 : $\vec F_{ij} = -\vec F_{ji}$ perché forze interne, in modulo $F_{ij} = F_{ji}$

sommando le equazioni del moto si ottiene

$$(m_1+m_2+m_3)\,a = (m_1+m_2+m_3)g\sin\theta - (F_{A_1}+F_{A_2}+F_{A_3}) \quad (*)$$

concordemente col fatto che solo le forze esterne hanno effetto sul centro di massa del sistema (I equazione cardinale)

le forze di attrito sono le uniche a esercitare momento rispetto gli assi di rotazione dei tre corpi e sono tutte tre tali da permettere questa scrittura della II equazione cardinale :

$$\vec\tau_0 = \vec R\times\vec F_A = \frac{d\vec L_0}{dt} = I_0\vec\alpha \quad \text{ovvero} \quad F_{A_i} = m_i\frac{K_i^2}{R^2}a$$ (si ipotizza il puro rotolamento, $\alpha = a/R$, e $I_0 = mK^2$)

quindi $F_{A_1}+F_{A_2}+F_{A_3} = (m_1K_1^2+m_2K_2^2+m_3K_3^2)\,a/R^2$ per cui, sostituendo nella (*),

si ottiene
$$\boxed{a = \frac{g\sin\theta}{1+\dfrac{m_1K_1^2+m_2K_2^2+m_3K_3^2}{(m_1+m_2+m_3)R^2}} = \frac{g\sin\theta}{1+\sum_i m_iK_i^2/M_{tot}R^2}}$$ ($M_{tot} = m_1+m_2+m_3$)

Sostituendo a nelle espressioni per F_{12}, F_{23} e per le forze d'attrito si ricava:

$$F_{12} = m_1 g \sin\theta - m_1 a - F_{A1} = m_1 g \sin\theta - m_1 a - \frac{m_1 k_1^2}{R^2} a = m_1 g \sin\theta \left[\frac{\sum_1^3 i\, m_i k_i^2 - M_{TOT} k_1^2}{\sum_1^3 i\, m_i k_i^2 + M_{TOT} R^2} \right]$$

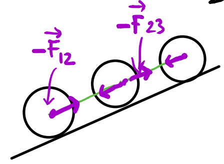
$$F_{23} = m_3 g \sin\theta - m_3 a - F_{A3} = m_3 g \sin\theta - m_3 a - \frac{m_3 k_3^2}{R^2} a = m_3 g \sin\theta \left[\frac{\sum_1^3 i\, m_i k_i^2 - M_{TOT} k_3^2}{\sum_1^3 i\, m_i k_i^2 + M_{TOT} R^2} \right]$$

$$F_{A_1} = m_1 g \sin\theta \frac{M_{TOT} k_1^2}{M_{TOT} R^2 + \sum_i m_i k_i^2} \qquad F_{A_2} = m_2 g \sin\theta \frac{M_{TOT} k_2^2}{M_{TOT} R^2 + \sum_i m_i k_i^2} \qquad F_{A_3} = m_3 g \sin\theta \frac{M_{TOT} k_3^2}{M_{TOT} R^2 + \sum_i m_i k_i^2}$$

Per rispondere nello specifico alle domande dei punti (a) e (b) è sufficiente porre $m_1 = m_3 = m$; $m_2 = 2m$; $k_1^2 = k_3^2 = R^2/2$; $k_2^2 = \frac{2}{5} R^2$

e si ottiene subito $a = \frac{20}{29} g \sin\theta$; $F_{12} = -\frac{1}{29} mg \sin\theta$; $F_{23} = +\frac{1}{29} mg \sin\theta$.

Per la convenzione dell'orientazione delle forze interne $\vec{F}_{ij}$ adottata, se $F_{12} < 0$ ciò implica che la prima asta è in compressione; mentre se $F_{23} > 0$ anche la seconda asta è in compressione.



Nel caso (c) si pone $m_1 = m_3 = 2m$, $m_2 = m$ e $k_1^2 = k_3^2 = 2R^2/5$, $k_2^2 = R^2/2$ e si ricava

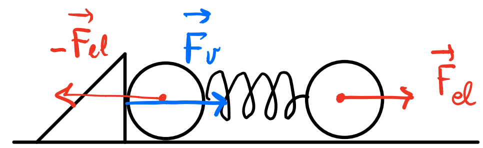
$a = \frac{50}{71} g \sin\theta$; $F_{12} = \frac{2}{71} mg \sin\theta$; $F_{23} = -\frac{2}{71} mg \sin\theta$
ovvero le due aste sono in trazione.
Inoltre $F_{A1} = F_{A3} = \frac{40}{71} mg \sin\theta$; $F_{A_2} = \frac{25}{71} mg \sin\theta$
$F_{A1} = F_{A3} = 5.52$ N, $F_{A2} = 3.95$ N

Il lavoro delle forze di attrito è sempre nullo in un puro rotolamento.

Se l'attrito massimo staticamente è fissato dal coefficiente μ_s, si avrà rotolamento puro solo se $F_A < F_{A,max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos\theta$

Per le due sfere risulta $F_{A1} = F_{A3} > F_{A,MAX,SFERA}$ mentre il cilindro $F_{A2} < F_{A,MAX}$ (CIL)
Quindi le sfere iniziano anche slittando, mentre il cilindro rotola e basta.

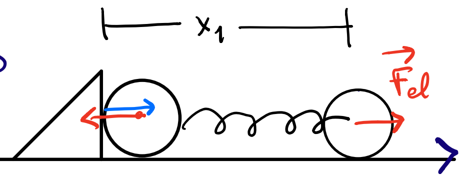
2 Nella configurazione iniziale la molla è compressa di a rispetto alla sua lunghezza di riposo.



Agisce dunque sulle masse la forza di natura elastica che, nell'istante iniziale, ha intensità

$$F_{el} = k a$$

Quando il sistema è lasciato libero la massa di destra accelera in direzione dei valori crescenti di x e la forza elastica risulta pari a



$$F_{el} = -k(x_1 - l_0)$$

Sulla massa di sinistra agisce questa stessa forza (in verso opposto) e la forza $\vec{F}_v$ che esprime il vincolo del cuneo. La massa rimane appoggiata a questo cuneo finché F_{el} è rivolta verso sinistra, ovvero finché

$$-F_v = F_{el} = k(x_1 - l_0) < 0 \qquad \text{(proiezione sull'asse } x \text{ verso destra)}$$

Quindi la massa di sinistra si stacca quando

$$x_1 = l_0 .$$

Per ottenere la velocità (di m_1) nell'istante corrispondente si può applicare la conservazione dell'energia (la forza vincolare non lavora) per cui

$$E_i = \frac{1}{2} k a^2 = E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2$$

energia iniziale elastica della molla compressa

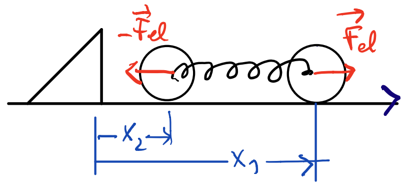
energia (cinetica) della massa di destra con velocità v_{01}

$$v_{01} = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\, a$$

Il centro di massa ha inizialmente (all'istante di stacco) la velocità

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{01}}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{k m_1}}{m_1 + m_2}\, a$$

Le equazioni del moto per il sistema liberato dal vincolo iniziale sono le



$$m_1 a_1 = -k\,(x_1 - x_2 - l_0)$$
$$m_2 a_2 = +k\,(x_1 - x_2 - l_0)\,, \quad \text{ovvero}$$

$$a_1 = -\frac{k}{m_1}(x_1 - x_2 - l_0)$$
$$a_2 = +\frac{k}{m_2}(x_1 - x_2 - l_0) \quad \Rightarrow \text{(sottraendole)}$$

$$a_1 - a_2 = -\frac{k}{\mu}(x_1 - x_2 - l_0)$$

con $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ massa ridotta

La grandezza $a_1 - a_2 = \dfrac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2)$ è l'accelerazione relativa delle due masse.

Quindi

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -\frac{k}{\mu}(x_1 - x_2 - l_0)$$

è l'equazione di un moto oscillatorio armonico semplice con frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$$

L'ampiezza delle oscillazioni si può per esempio calcolare partendo dalla soluzione dell'equazione del moto,

fase iniziale

$$x_1 - x_2 = l_0 + A \sin(\omega t + \phi)$$

l'ampiezza

con velocità relativa

$$v_1 - v_2 = \omega A \cos(\omega t + \phi).$$

ϕ e A si fissano a partire dalle condizioni iniziali dei moti delle due masse:

$$x_1(0) - x_2(0) = l_0 = l_0 + A\sin\phi \;\Rightarrow\; \phi = 0$$
$$v_1(0) - v_2(0) = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\,a = \omega A\cos\phi = \omega A$$

per cui $\quad A = \dfrac{1}{\omega}\sqrt{\dfrac{k}{m_1}}\,a = \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1+m_2}}\,a$

se $m_1 = m_2 \Rightarrow A = a/\sqrt{2}$; numericamente $A \simeq 8.5$ cm

L'energia totale è $\frac{1}{2}ka^2$ e si può scomporre nella parte cinetica del centro di massa e di quella relativa al CM:

$$E_{CM} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{k\,m_1}{(m_1+m_2)^2}a^2 = \frac{1}{2}ka^2\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

per cui $E_{REL} = E_{TOT} - E_{CM} = \frac{1}{2}ka^2\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$. Se $m_1 = m_2 \Rightarrow E_{REL} = \frac{1}{4}ka^2 = E_{CM} = 0.9$ J